2/3/16

Αξιωματική Θεμελίωση της Μηχανικής

Τα αξιώματα του Νεύτωνα για την κίνηση των σωμάτων αν και εμπειρικά είναι απολύτως αποδεικτά και επαληθεύονται πλήρως από πειράματα.

1ο Αξίωμα (Νόμος της Αδράνειας)

Ένα σώμα παραμένει σε κατάσταση ηρεμίας ή εκτελεί ευθύγραμμη και ισοταχή κίνηση εκτός αν δρα πάνω του μια δύναμη. Άρα για να υπάρξει κίνηση πρέπει να ασκηθεί δύναμη (για να σταματήσει πρέπει να ασκήσω δύναμη). Για να ποσοτικοποιήσουμε τον νόμο της αδράνειας ορίζουμε την ορμή ενός σώματος $\vec{p} = m\vec{v}$, $\vec{p}$ ορμή, m μάζα, $\vec{v}$ ταχύτητα δηλαδή το γινόμενο της μάζας επί την ταχύτητά του. Η φυσική σημασία της ορμής αναδεικνύεται όταν η ταχύτητα του σώματος είναι σταθερή $\vec{v} =$ σταθερή $\Rightarrow$ $\vec{p} =$ σταθερή (μάζα σταθερή) και δηλώνει ότι ένα ελεύθερο υλικό σημείο δεν μπορεί από μόνο του να αλλάξει την κινητική του κατάσταση.

2º Αξίωμα (Νόμος της επιτάχυνσης)
Η μεταβολή της ποσότητας κίνησης ενός υλικού σημείου είναι ανάλογη της δύναμης που επιδρά σε αυτό και γίνεται κατά τη διεύθυνση της δύναμης.
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, αν η μάζα παραμένει σταθερή :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = ma.$$

Φυσική σημασία : Το 2º αξίωμα εισάγει τις έννοιες της μάζας, της επιτάχυνσης και της δύναμης. Και οι μεταξύ τους σχέση καθορίζει τη κίνηση του σώματος.
Δηλαδή : $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ άρα $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ (m σταθερό)

Δηλαδή έχω μια δευτέρας τάξεως διαφορική εξίσωση που καθορίζει την τροχιά του σώματος, δεδομένων των αρχικών θέση, ταχύτητα, δύναμης.
Για να λύσω πλήρως την $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ χρειάζομαι τις τιμές $\vec{r}(0) = \vec{r_0}$ και $\frac{d\vec{r}}{dt}(0) = \vec{v_0}$.
και προφανώς την $\vec{F}$. ①

Αρχή του καθορισμού.
Στα πλαίσια της κλασσικής μηχανικής η εξέλιξη ενός συστήματος είναι μονοσήμαντα καθορισμένη από την αρχική του κατάσταση, δηλαδή την αρχική θέση, ταχύτητα και το 2º αξίωμα του Νεύτωνα, δηλαδή από το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών.

3º Αξίωμα (Νόμος δράσης-αντίδρασης)
Οι δυνάμεις τις οποίες ασκούν δύο υλικά σημεία το ένα στο άλλο είναι ίσες κατά μέτρο και αντίθετες σε φορά και ενεργούν στην ευθεία που ενώνει τα δύο σημεία.
Δηλαδή αν $\vec{F_{12}}$ είναι η δύναμη που ασκεί το σώμα 1 στο 2 τότε $\vec{F_{12}} = -\vec{F_{21}}$, όπου $\vec{F}$... είναι η δύναμη...

ασκεί το σώμα 2 στο 1.

Φυσική σημασία: Οι δυνάμεις εμφανίζονται σε ζεύγη. ΔΕΝ υπάρχουν μεμονωμένες δυνάμεις.

Οι έννοιες του χώρου και του χρόνου

Ο χώρος θεωρείται συνεχής, ομογενής και ισότροπος και τα αποτελέσματα ενός πειράματος ή μιας παρατήρησης, είναι ανεξάρτητα των χωρικών συντεταγμένων και του προσανατολισμού. Ο χρόνος είναι ομογενής, δηλαδή τα αποτελέσματα ενός πειράματος είναι τα ίδια για διαφορετικές χρονικές στιγμές εκτέλεσης του πειράματος.

Είδη δυνάμεων

- Βαρυτικές
- Ηλεκτρομαγνητικές
- Ισχυρές πυρηνικές
- Ασθενείς πυρηνικές

Μονάδα Μέτρησης

Η μονάδα μέτρησης είναι το Newton (1 N) και αντιστοιχεί στη δύναμη που δίνει σε μάζα 1kg επιτάχυνση $1\,m/sec^2$.

Παράδειγμα

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy με τροχιά $\vec{r}(t) = (a\cos\omega t)\hat{i} + (b\sin\omega t)\hat{j}$ $a,b,\omega>0$. Ν.δ.ο το σωματίδιο κινείται σε έλλειψη και η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο έχει πάντα φορά την αρχή των αξόνων.

$$\left.\begin{aligned} x = a\cos(\omega t) &\rightsquigarrow \frac{x}{a} = \cos(\omega t) \\ y = b\sin(\omega t) &\rightsquigarrow \frac{y}{b} = \sin(\omega t) \end{aligned}\right\} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad a \neq b$$

Όμως $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega\sin(\omega t)\hat{i} + b\omega\cos(\omega t)\hat{j}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -a\omega^2\cos(\omega t)\hat{i} - b\omega^2\sin(\omega t)\hat{j} = -\omega^2\big(\underbrace{a\cos(\omega t)\hat{i} + b\sin(\omega t)\hat{j}}_{r}\big) = -\omega^2\vec{r}$$

άρα $\vec{F} = m(-\omega^2\vec{r}) = -m\omega^2\vec{r}$ (φορά αντίθετη στο r)

Παρατήρηση

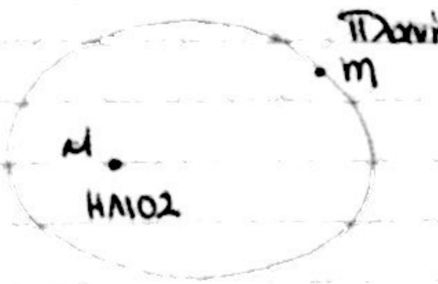
Το ενδιαφέρον είναι το αντίστροφο απ' αυτό που αποδείξαμε. Δηλαδή να βρεθούν οι δυνάμεις που εξαναγκάζουν υλικά σημεία σε τέτοιες τροχιές

Νόμος της παγκόσμιας έλξης

Ο βασικός νόμος που καθορίζει τις βαρυτικές δυνάμεις καλείται νόμος της παγκόσμιας έλξης και διατυπώθηκε από το Νεύτωνα. Δύο υλικά σημεία έλκονται μεταξύ τους με δύναμη ανάλογη των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη το τετράγωνο της μεταξύ τους απόστασης. Η δύναμη ενεργεί στην ευθεία που συνδέει τα δύο σημεία. Δηλαδή $\vec{F} = -G\frac{M_1M_2}{r^2}\hat{r}$, όπου $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kgr^2}$

Άρα το βάρος των σωμάτων στην επιφάνεια της γης είναι $\vec{B} = -G\frac{M_{γης}\cdot m}{R^2_{γης}}\hat{r} = -gm\hat{r}$.

Οι τροχιές των πλανητών είναι επίπεδες



1. Τι τροχιά εκτελεί;
2. Η τροχιά είναι επίπεδη.

2. $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\ddot{\vec{r}}$, $\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \Rightarrow$

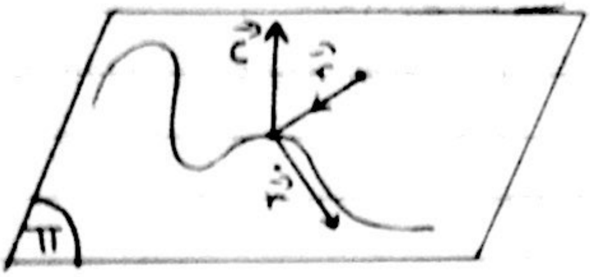
⇒ $-G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} = m\ddot{\vec{r}}$ ⇒ $\boxed{\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}}$ άρα $\ddot{\vec{r}} \parallel \vec{r}$
[διάνυσμα επιτάχυνσης // διάνυσμα θέσης]

Δηλαδή $\ddot{\vec{r}} \times \vec{r} = \vec{0}$

Υπολογίζω την παράγωγο $\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{r} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \vec{0}$.

Δηλαδή $\dot{\vec{r}} \times \vec{r} = \vec{c}$.

Ταχύτητα και διάνυσμα θέσης βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που καθορίζει το διάνυσμα c.



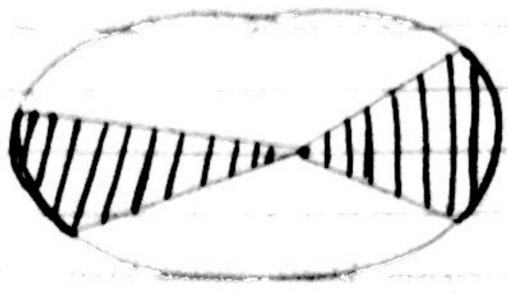
<u>Εφαρμογή</u>

<u>Ο πρώτος νόμος του Kepler</u> (νόμος των κωνικών τομών)

Η τροχιά ενός πλανήτη είναι κωνική τομή με τον ήλιο στη μία εστία της, η εκκεντρότητα της κωνικής τομής $e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$, η τροχιά $r = \frac{(1+e)r_0}{1+e\cos\theta}$, όπου r_0, v_0 η αρχική θέση και ταχύτητα του πλανήτη και M η μάζα του ήλιου.

<u>2ος Νόμος του Kepler</u> (νόμος των ίσων εμβαδών)

Το διάνυσμα που συνδέει το ήλιο με τον πλανήτη σαρώνει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους



(Αν σε χρόνο t διανύσει τις παραπάνω τροχιές, τότε τα εμβαδά είναι ίσα).

$\vec{c} = \dot{\vec{r}} \times \vec{r} = \vec{v} \times \vec{r}$

$\vec{r} = |\vec{r}|\,\hat{r}$ (σε πολικές συντεταγμένες)

$\vec{v} = \underset{\hat{T}}{\dot{r}\hat{r}} + \underset{\hat{N}}{r\dot{\theta}\hat{\theta}}$

$\vec{c} = (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \times (|\vec{r}|\hat{r}) = r\dot{\theta} r\theta \times \hat{r} = -r^2\dot{\theta}\hat{k}$

$= 0$

$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} = -\hat{N} \times \hat{T}$

Γνωρίζουμε όμως ότι το $\vec{c}$ είναι σταθερό διάνυσμα.

Δηλαδή $\vec{c} = c_0\hat{k} = -r^2\dot{\theta}\hat{k}$, δηλαδή $r^2\dot{\theta}$ = σταθερό.

$r^2\dot{\theta} = r^2(0)\,\dot{\theta}(0)$ (1) αφού είναι σταθερό, με ότι τιμή ξεκινήσει στο 0 με αυτή θα παραμείνει.

$(1) = r_0\Big(\underbrace{r_0 \frac{d\theta}{dt}(0)}_{\omega(0)}\Big) = r_0 v_0$

$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ (Μεταβολή εμβαδού σε πολικές συντεταγμένες)

Δηλαδή $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ = σταθερό.

(Ο ρυθμός με τον οποίο καλύπτεις εμβαδά είναι σταθερός)

Άσκηση (Υποδείξεις για λύση)

Απόδειξη πρώτου νόμου. Ξεκινάω από το νόμο του Newton

$m\frac{d^2\vec{r}}{dt} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$.

$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$

Ξεχωρίζω ανισώσεις. Δημιουργώ ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, χρησιμοποιώ $r^2\dot{\theta}$ = σταθερή $= r_0 v_0$ και λύνω το σύστημα.

3ος Νόμος του Kepler

Ο χρόνος T που χρειάζεται ο πλανήτης για μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον ήλιο (περίοδος του πλανήτη) και ο μεγάλος ημιάξονας α συνδέεται με ...

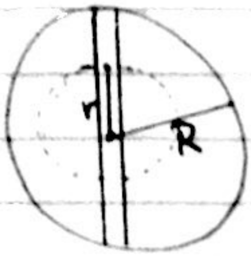
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

άμεση συνέπεια $dA = \frac{1}{2} r_0 v_0 dt$

$$A = \frac{1}{2} r_0 v_0 T = \pi a b$$

$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

<u>Παράδειγμα</u>



Θεωρώ ότι η μάζα της γης είναι M, η πυκνότητα σταθερή και μια μέση ακτίνα R.

$$M = Vp = \frac{4\pi}{3} R^3 p$$

Στην τυχαία θέση $M_r = \frac{4\pi}{3} r^3 p$

Από το νόμο του Νεύτωνα:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$$

$$m\ddot{r} = -\frac{GmM_r}{r^2} = -G\frac{\frac{4\pi}{3} r^{\cancel{3}} p}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow \ddot{r} + \left(\frac{4\pi}{3} Gp\right) r = 0$$

Αν $\omega^2 = \frac{4\pi}{3} Gp$, $\ddot{r} + \omega^2 r = 0$

$$\left.\begin{array}{l} r(t) = A\cos(\omega t)\hat{\imath} + B\sin(\omega t)\hat{\jmath} \\ \text{Σε } t=0,\ r(0)=R,\ v(0)=0 \end{array}\right\} A, B$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{4\pi}{3} GM}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \frac{g}{R}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq 1{,}45\,hrs$$

και αντικαθιστώ την $M_{ΓΗΣ}$ και G, $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kgr, $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m